

1. 要約

重水のプラズマからの定常制動放射熱を計算し、高温プラズマ状態を保持するために必要な連続電子ビームのパワーを推定する。重水のプラズマは、イオンの電子すべてが電離されている状態（自由電子状態）と仮定する。

2. 重水のプラズマからの制動放射熱の計算

図 1 に示すように、直径 D およびビーム侵入深さ $h=0.05D$ （この比率は黒体放射熱を計算したビームエネルギー 10keV の場合の比率である）を一定とした円柱領域からの制動放射を計算する。

ここでは、制動放射に寄与するイオンと電子は重水のプラズマのみとし、電子ビーム入射による電子は考慮しない条件での計算である。

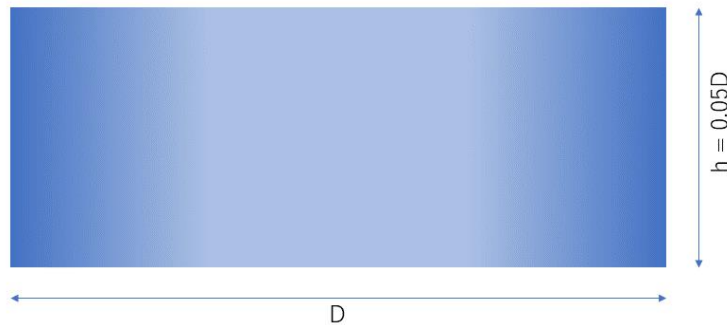


図 1. The calculation domain of plasma where the bremsstrahlung is considered.

重水は、下式のように全て電離している状態を仮定する。



ここで e^- は電子である。

このプラズマの制動放射は、イオン D^+ および O^{8+} による自由電子の速度の変化によるものである。電子の速度は Maxwell 分布に従うと仮定すると、全周波数の制動放射のエネルギー密度は下式で計算される^[1]。

$$\delta_p = 1.4 \times 10^{-27} T^{1/2} Z^2 n_e n_i g(T) \text{ [erg/s/cm}^3\text{]}$$

ここで T は温度[K]、 Z は複数種類のイオンの電荷を荷重平均した値で 3.3、 n_e は電子密度[cm^{-3}]、 n_i はイオン密度[cm^{-3}]、 $g(T)$ は Gaunt factor で 1 のオーダーで今回の計算では 1.2 とした。

体積 V のプラズマからの制動放射は下式で計算される。

$$P = \delta_p V = 1.4 \times 10^{-27} T^{1/2} Z^2 n_e n_i g(T) V \text{ [erg/s]} \quad (2)$$

(1)式より電子とイオンの数密度[cm^{-3}]は下式で計算される。

$$n_e = 10n_{\text{D}_2\text{O}} = 10 \frac{\rho N_A}{W}$$

$$n_i = 3n_{D2O} = 3 \frac{\rho N_A}{W}$$

ここで、 $\rho = 1.1 \text{g/cm}^3$ は重水の密度、 $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ はアボガドロ数、 $W = 20 \text{g/mol}$ は重水のモル数である。

ビーム直径（即ちプラズマ体積）に対する黒体放射[J/s]と制動放射[J/s]の比較を図2に示す。計算領域はビーム直径とビーム侵入深さの比を一定に保って変化させた。温度は $1.0 \times 10^7 \text{[K]}$ 、 $3.0 \times 10^7 \text{[K]}$ 、 $1.0 \times 10^8 \text{[K]}$ とした。

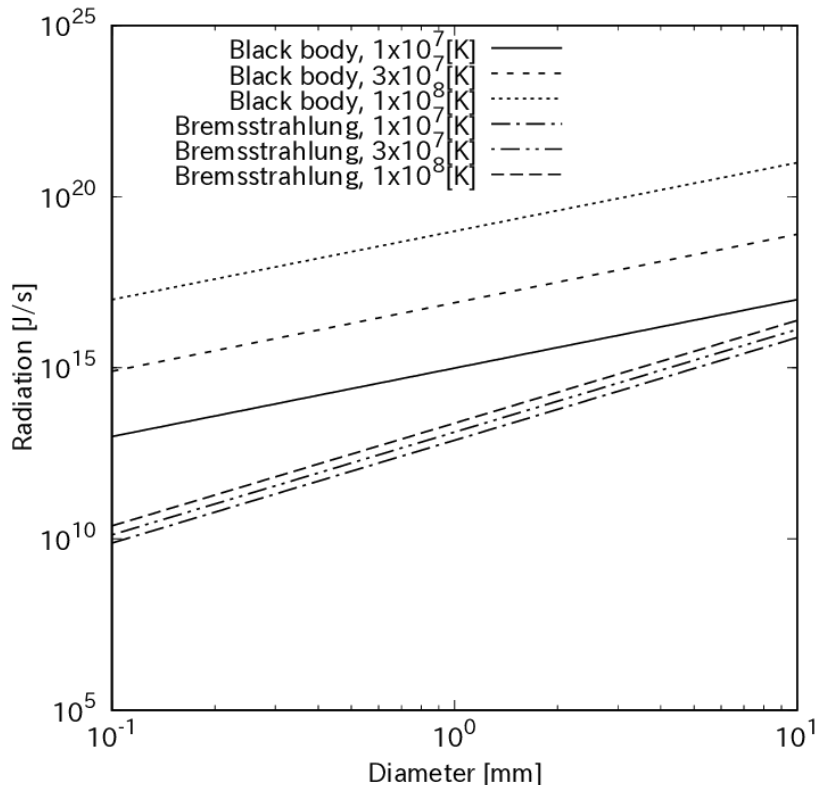


図2. The bremsstrahlung and black body radiation.

計算結果から、電子ビームの直径が 0.1[mm] から 10[mm] の範囲のプラズマからの黒体放射熱はプラズマ温度が $1.0 \times 10^7 \text{[K]}$ の場合で約 10^{13}[J/s] から 10^{17}[J/s] であり、 $3.0 \times 10^7 \text{[K]}$ 、 $1.0 \times 10^8 \text{[K]}$ の場合ではそれぞれの比率の4乗に比例して大きくなる。これに対して制動放射熱は $1.0 \times 10^7 \text{[K]}$ の場合で約 10^{10}[J/s] から 10^{16}[J/s] となり、ビーム径が 0.1[mm] の場合は約3桁低いが、ビーム径が大きくなるに従いその差は小さくなり、ビーム径が 10[mm] では黒体放射熱に漸近する。この傾向は、ビーム径が大きくなるに従い（即ち、プラズマ体積が大きくなる）光学的な厚みが増し黒体放射に漸近する傾向を示している。また、制動放射熱がプラズマ温度の影響が小さいのは、黒体放射熱が T^4 に比例するのに対して、制動放射熱は式(2)から $T^{1/2}$ に比例するためである。

3. 電子ビームの電子からの制動放射熱の計算

ここでは、連続電子ビームによりプラズマ温度が保持されている状態について、入射される電子を考慮した制動放射熱の計算を行う。

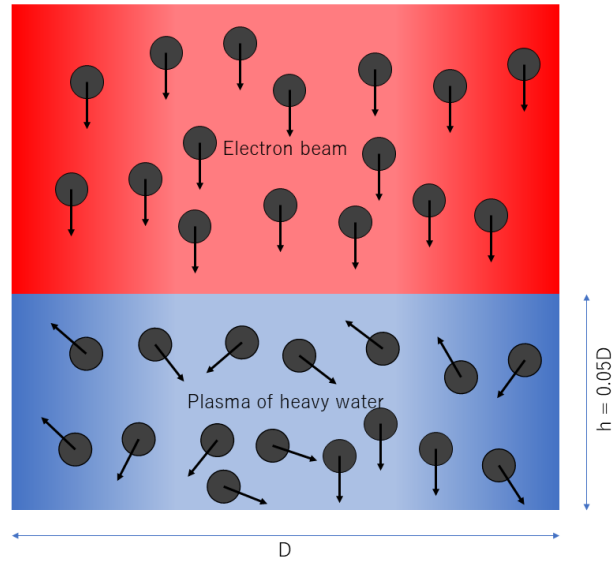


図 3. The configuration to compute the required power of the electron beam. The dark grey circles with arrow indicate the electron motion. In the electron beam, they move uniformly, while they random with Maxwell distribution in the plasma.

連続電子ビームからプラズマに入射した電子は自由電子としてプラズマ内に定在するものとし、その速度は Maxwell 分布に従うと仮定する。制動放射は前と同じように計算できる。

$$P = 1.4 \times 10^{-27} T^{1/2} Z^2 n_{etot} n_i g(T) V \quad (3)$$

ここで、電子の密度 n_{etot} はビームから入射した電子密度 n_{eb} とプラズマにあった電子密度 n_e の合計になる。

$$n_{etot} = n_{eb} + n_e \quad (4)$$

一方、ビーム内の電子数の割合 R_{eb} [s^{-1}] と、電子ビームのパワーとの関係は、

$$R_{eb} = P_b / V_b$$

ここで V_b は電子のエネルギー [eV] で、侵入深さ h の関数である。 ρh と V_b の関係は、NIST data^[2] にのっている。考えている直径は $D = 0.1 \sim 10$ [mm] なので $\rho h = 5.5 \times 10^{-4} \sim 0.055$ [g/cm^2] であり、NIST データと $\rho h = 5.0 \times 10^{-4} \sim 0.1$ [g/cm^2]. の範囲で 5 次多項式で近似する。近似関数は以下となり、近似度を図 4 に示す。

$$V_b = 514251.81775902(\rho h)^5 - 113773.344888432(\rho h)^4 + 9273.94769940823(\rho h)^3 - 355.90322706706(\rho h)^2 + 9.69758706930029(\rho h) + 0.0128262996305675$$

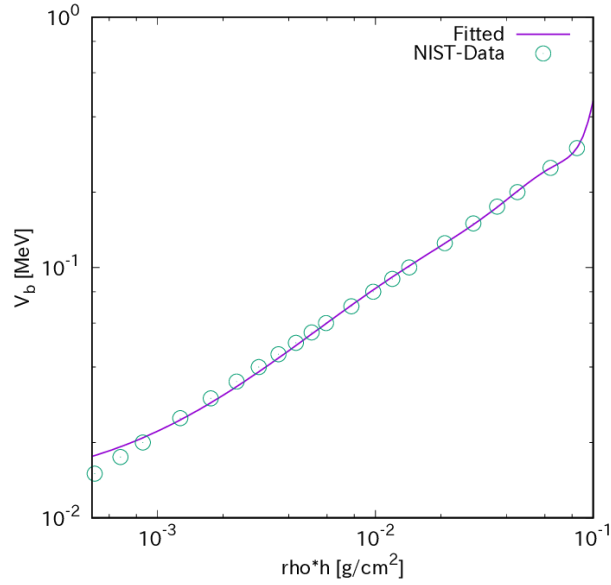


図 4. The variation of the electron beam energy with the penetration depth.

考えている体積 V [cm^3] に 1 秒間に入射する電子数 N_{eb} [$\text{cm}^{-3}\text{s}^{-1}$] はビームパワー P_b に比例するから下式で計算される。

$$N_{eb} = \frac{R_{eb}}{V} = \frac{P_b}{V_b V} \quad (5)$$

ところで、プラズマ温度を保持するための熱収支として、入射ビームのエネルギー量 P_b と制動放射量 P が釣り合う条件を計算するので、下式が成立する。

$$P_b = P \quad (6)$$

(4)式の n_{eb} に(5)式の N_{eb} を代入すると電子ビームから入射する電子の寄与分を含めた制動放射熱はビームパワー P_b を含めた陰的方程式となり下式から計算できる。

$$P_b = 1.4 \times 10^{-27} T^{1/2} Z^2 \left(n_e + \frac{P_b}{V_b V} \right) n_i g(T) V \quad (7)$$

図 5 に、(7)式から計算した電子ビームから入射した電子の寄与分を含めた制動放射熱、(2)式から計算した電子ビーム入射を考慮しないプラズマからの制動放射熱、(2)式の n_e に n_{eb} を代入した値の比較を 1.0×10^7 [K] の場合について示す。図から、電子ビームが入射したことによる制動放射熱の増加量はプラズマ本体からの制動放射熱より 10 桁ほど小さくわずかである。これはビームの電子密度 ($\sim 10^{13} / \text{cm}^3$) が入射前のプラズマの電子密度 ($\sim 10^{23} / \text{cm}^3$) に比べて十分小さいことにより明らかである。

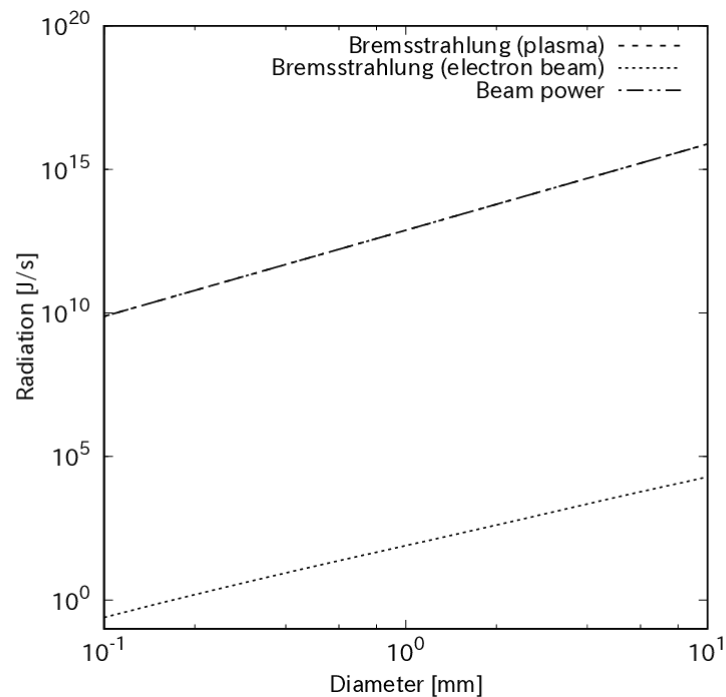


図 5. The required beam power, the bremsstrahlung of plasma, the bremsstrahlung of electron beam

4. まとめ

重水素プラズマの体積をパラメータにして制動放射熱を計算して、黒体放射熱と比較し、連続電子ビームによりプラズマ温度を保持するために必要なビームパワーを推定した。計算の結果、制動放射熱は、プラズマ直径が 0.1mm（深さがその 1/20）の場合は黒体放射熱より 3 桁ほど小さくなるが、ビームエネルギーとして 10^{10}W 程度の膨大なエネルギー密度となるため、連続ビームとしては非現実的なレベルと考えられる。

追：本計算では黒体放射との比較との目的により、プラズマ体積は一定とした。仮にプラズマが膨張した場合を想定し、プラズマ塊が光学的に薄いとの条件のもとに制動放射がどうなるかを推察する。

制動放射熱量は式(2)で定義され、イオン密度 n_i と電子密度 n_e 、体積 V の積 ($n_i \times n_e \times V$) に比例する。仮にプラズマが膨張して N 倍になると、質量保存からイオン密度と電子密度は $1/N$ 倍になり、体積 V が N 倍になるため、これらの積は $1/N$ 倍となる。すなわち、式(2)から推察される制動放射熱の体積膨張効果は膨張量に半比例して減少すると考えられる。

References

- [1]. Plasma physics, JAXA Astronomy Research Center, Niigata University, 2014
- [2]. https://physics.nist.gov/cgi-bin/Star/e_table.pl